

Digitalno upravljanje

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 4

Emulacija kontinualnih kontrolera

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu frekvencijsku karakteristiku diskretnog sistema
- Izvrše diskretizaciju analognog regulatora i razumiju razliku između različitih diskretizacionih postupaka
- Razumiju uticaj diskretizacije na frekvencijsku karakteristiku sistema
- Izvrše odabir odgovarajuće periode odabiranja u skladu sa karakteristikama sistema i njegovim okruženjem

Dizajn digitalnih regulatora

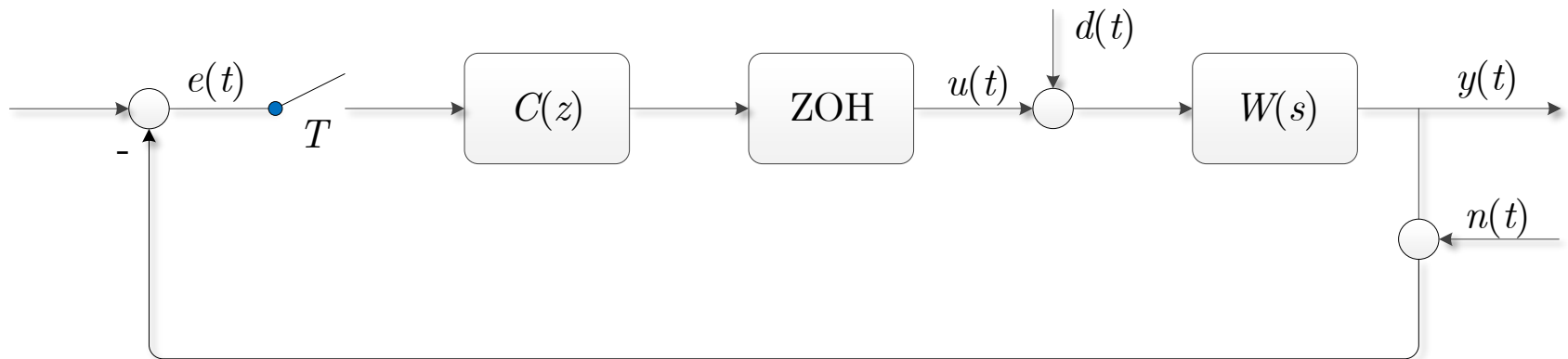
Postoje dva načina za dizajn digitalnog regulatora $C(z)$:

- **Diskretizacijom kontinualnog regulatora**

Cilj je diskretizovati kontroler $C(s)$, tako da diskretni SAU ima približno iste performanse kao kontinulani sistem.

- **Direktnim dizajnom u diskretnom domenu**

Pravi se ekvivalentna šema SAU-a u diskretnom domenu, tj. diskretizuje se kontinualni dio SAU-a. Nakon toga se $C(z)$ dizajnira direktno u diskretnom domenu. Na ovaj način možemo finije da podesimo performanse SAU-a.



Frekvencijska karakteristika

Postoji više metoda za diskretizaciju kontinualnih kontrolera. Koliko će vjerno digitalni sistem reprodukovati odziv kontinualnog sistema možemo zaključiti na osnovu posmatranja njihovih frekvencijskih karakteristika. Frekvencijska karakteristika linearnog sistema se definiše na sljedeći način:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}.$$

Ova karakteristika se često naziva i frekvencijski odziv, jer u sebi sadrži informaciju od odzivu sistema na sinusni signal frekvencije ω_0 . Naime, odziv sistema $G(s)$ na signal $\sin(\omega_0 t)$, u stacionarnom stanju, je jednak:

$$y_{ss}(t) = |G(j\omega_0)| \times \sin(\omega_0 t + \angle G(j\omega_0)).$$

Frekvencijska karakteristika nekog diskretnog sistema $G_d(z)$ se definiše na sljedeći način:

$$G_d(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}}.$$

Frekvencijska karakteristika

Može se pokazati da je odziv diskretnog sistema na signal $\sin(\omega_0 nT)$ jednak:

$$y_{dss}(nT) = |G_d(j\omega_0)| \times \sin(\omega_0 nT + \angle G_d(j\omega_0)).$$

Upoređujući $y_{ss}(t)$ i $y_{dss}(nT)$, može se zaključiti da će odziv diskretnog sistema u trenucima odabiranja biti jednak odzivu kontinualnog sistema, ukoliko je njegova frekvencijska karakteristika na frekvenciji ω_0 jednaka frekvencijskoj karakteristici kontinualnog sistema na ω_0 . Odnosno, odziv ova dva sistema na bilo koji signal će biti isti u trenucima odabiranja, ako su njihove frekvencijske karakteristike jednake za bilo koje ω :

$$G(j\omega) = G_d(e^{j\omega T}).$$

Treba imati u vidu da je frekvencijska karakteristika diskretnog sistema periodična, sa periodom Ω_s . Njen primarni pojas je definisan u opsegu $[-\omega_N, \omega_N]$, gdje je ω_N Nikvistova frekvencija koja je jednaka:

$$\omega_N = \Omega_s / 2.$$

Metod istog impulsnog odziva

Metod istog impulsnog odziva je jedan metod za diskretizaciju sistema. Po ovom metodu, impulsni odziv diskretnog ekvivalenta je jednak odabranom impulsnom odzivu kont. sistema, skaliranom sa periodom odabiranja T . Odnosno, funkcija diskretnog prenosa je jednaka:

$$G_d(z) = T \times Z \{g(nT)\} = T \times G^*(s) \Big|_{z=e^{sT}}.$$

Podsjetimo se da je $G^*(s)$ periodično produženje funkcije $G(s)$:

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s)$$

pa dalje slijedi:

$$G_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s) \Big|_{s=e^{j\omega T}}.$$

Ako je perioda odabiranja dovoljno mala, aliasing efekat se može zanemariti, pa se na ovaj način dobija da je:

$$G_d(e^{j\omega T}) = G(j\omega), \text{ za } \omega < \omega_N.$$

Metod istog impulsnog odziva

Ukoliko impulsni odziv sistema $g(t)$ ima nenultu vrijednost u trenutku $t=0$, tada je Laplasova transformacija njegovih odbiraka jednaka:

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s) + \frac{1}{2} g(0^+).$$

Kako je naš cilj da važi:

$$G_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s) \Big|_{s=e^{j\omega T}},$$

u ovim situacijama treba modifikovati $G_d(z)$ na sljedeći način:

$$G_d(z) = T \times \left[Z \{g(nT)\} - \frac{1}{2} g(0^+) \right].$$

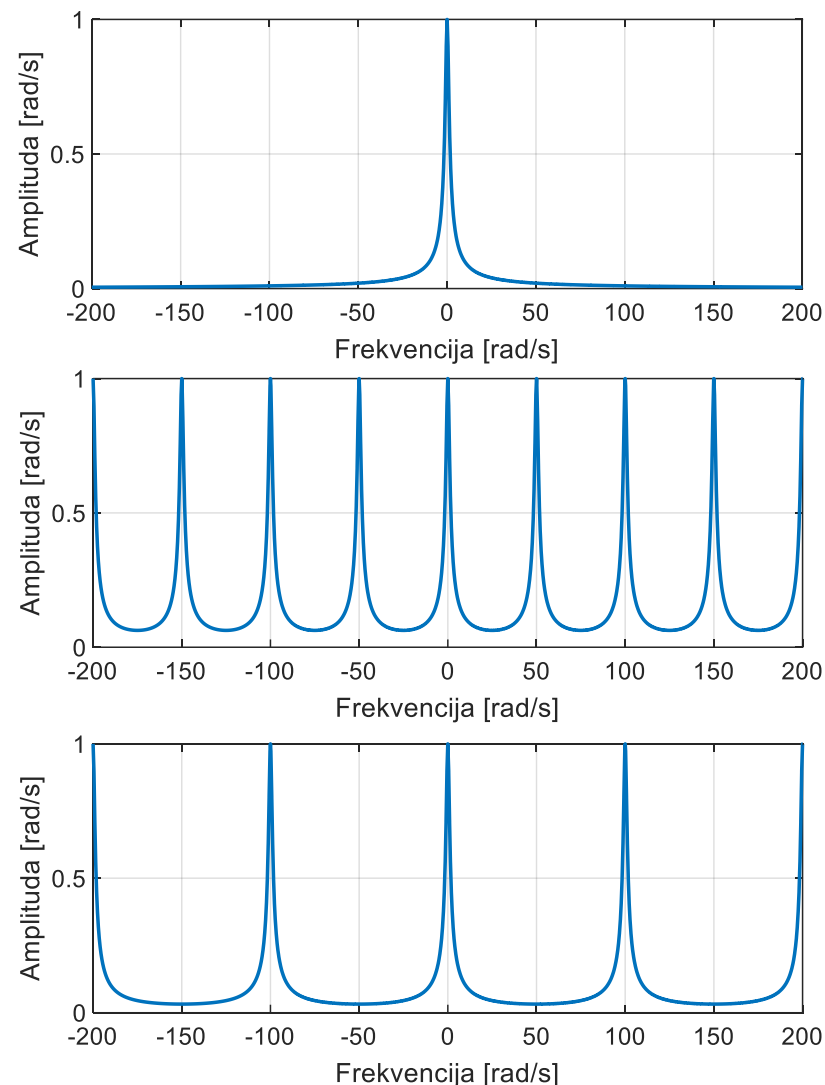
Napomenimo još jednom da se $Z\{g(nT)\}$ može očitati iz tablica.

Kod funkcija prenosa kod kojih se stepen brojioca i imenioca razlikuje za jedan, $g(0^+)$ je različito od nule. Ovo slijedi iz prve granične teoreme:

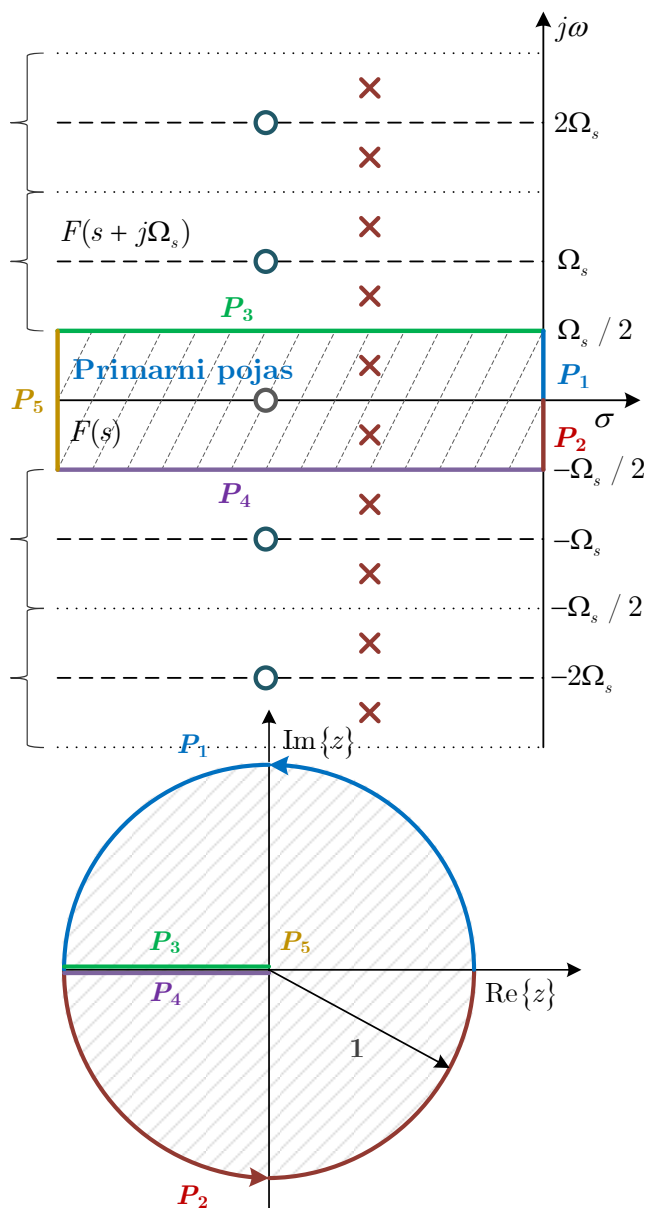
$$g(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s).$$

Metod istog impulsnog odziva

Na prvoj slici lijevo je prikazana frek. karakteristika nekog sistema, dok su na slikama ispod prikazane frekv. karakteristike diskretnih ekvivalenata za $\Omega_s=50$ rad/s i $\Omega_s=100$ rad/s. U oba slučaja dolazi do izobličenja amplitudske karakteristike na opsegu $[-\omega_N, \omega_N]$, što posljedica aliasing efekta. Treba napomenuti da će frekvencijski „repovi“ periodičnih produžetaka imati uticaj i na frekvenciji 0 rad/s, pa statičko pojačanje diskretnog ekvivalenta neće biti isto kao pojačanje kont. sistema. Takođe treba napomenuti da se ovim metodom ne mogu diskretizovati visokopropusni filtri.



Metod istog impulsnog odziva



Na slici desno je prikazana Laplasova transformacija odabranog impulsnog odziva sistema. Može se pokazati da se preslikavanjem e^{sT} primarni pojas preslikava u unutrašnjost jediničnog kruga, pri čemu se imaginarna osa preslikava u jediničnu kružnicu. Odnosno, oblast stabilnosti u z -domenu je unutrašnjost jediničnog kruga. Komplementarni pojasevi se takođe preslikavaju u unutrašnjost jediničnog kruga, jer važi:

$$e^{(s+j\omega\Omega_s)T} = e^{sT} e^{j\omega\Omega_s T} = e^{sT} e^{j\omega 2\pi} = e^{sT} = z.$$

Veza između polova kontinualnog i diskretnog sistema je:

$$z_i = e^{s_i T},$$

dok se nule preslikavaju na komplikovaniji način.

Primjer – metod istog impulsnog odziva

Funkcija prenosa kontinualnog sistema je:

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Primjenom metoda istog impulsnog odziva odrediti diskretne ekvivalente sistema za $T=0.5s$ i $T=2s$, a zatim skicirati i uporediti njihove frekvencijske karakteristike. Uporediti impulsne i step odzive sistema, kao i odzive sistema na signal $x(t)=\sin(5t)$, odnosno na signal $x(nt)=\sin(5nT)$ u diskretnom slučaju.

Korišćenjem metoda istog impulsnog odziva, za $T=0.5s$ dobija se sljedeći diskretni ekvivalent:

$$W_{d_1} = T \times \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \right\} = \frac{0.04414z^2 + 0.03166z}{z^3 - 2.02z^2 + 1.464z - 0.3679},$$

dok je za $T=2s$:

$$W_{d_2} = T \times \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \right\} = \frac{0.8081z^2 + 0.2299z}{z^3 - 0.0172z^2 + 0.1193z - 0.01832}.$$

```
c2d(W,T,'impulse');
```

Vraća $T \times \mathcal{Z}\{w(nT)\}$

Primjer – metod istog impulsnog odziva

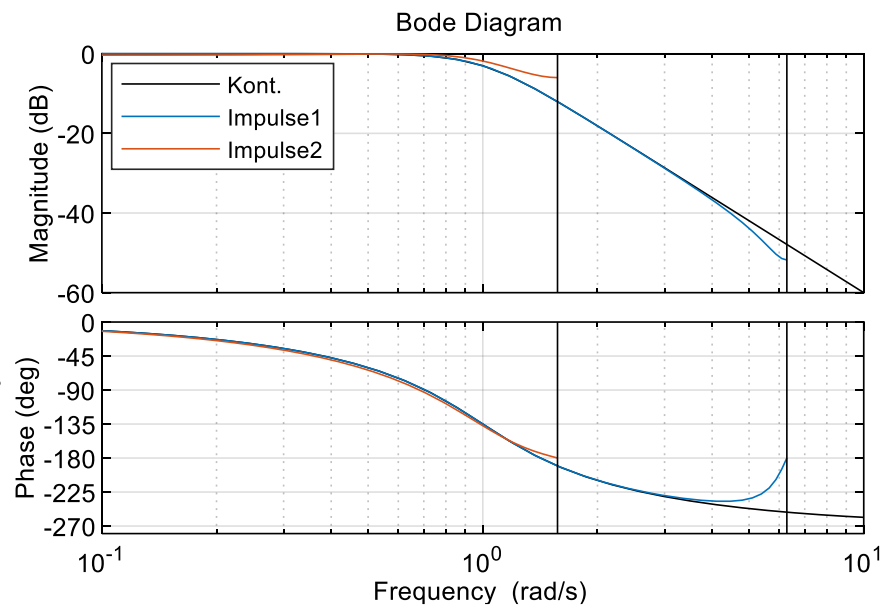
Na slici ispod su prikazane frekvencijske karakteristike kontinualnog sistema i diskretnih ekvivalenata. Frekvencijska karakteristika diskretnih ekvivalenata je prikazana samo na opsegu $[0, \omega_N]$, zbog njene periodičnosti. Sistem W_{d1} ima veće ω_N , odnosno širi primarni pojas, jer mu je manja perioda odabiranja. Iz tog razloga frekvencijska karakteristika sistema W_{d1} je približnija karakteristici kontinualnog sistema. Naime, na nižim učestanostima postoji malo odstupanje frekvencijske karakteristike sistema W_{d2} od karakteristike kontinualnog sistema, što je posljedica aliasing efekta.

Statičko pojačanje sistema $W(s)$ je jednako 1, dok su statička pojačanja diskretnih ekvivalenata:

$$K_{d1} = \lim_{z \rightarrow 1} W_{d1}(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_{d1}(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = 0.9998.$$

$$K_{d2} = \lim_{z \rightarrow 1} W_{d2}(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_{d2}(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = 0.9577.$$

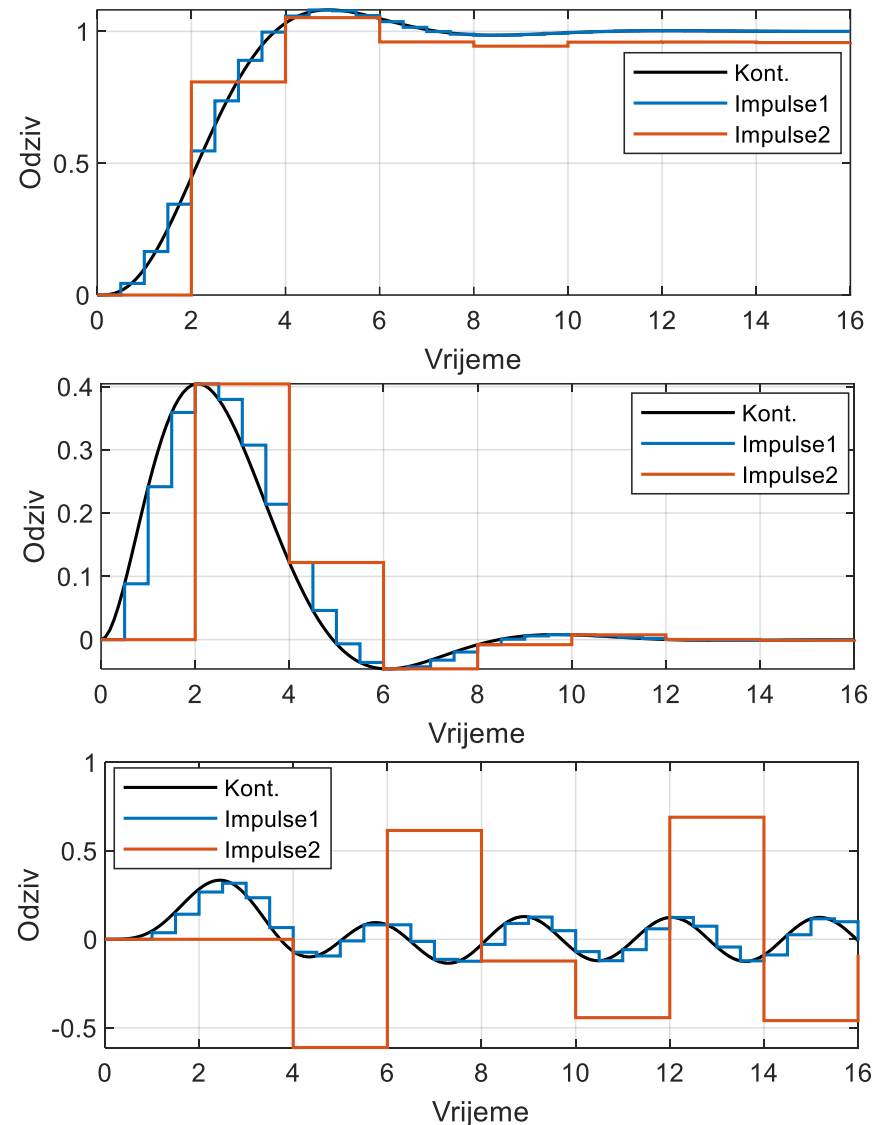
Na osnovu ovoga možemo očekivati da će se vrijednosti step odziva sistema razlikovati u stacionarnom stanju.



Primjer – metod istog impulsnog odziva

Na slikama desno su prikazani step odzivi, impulsni odzivi, kao i odzivi sistema na signal $x(t)=\sin(5t)$. Impulsni odzivi diskretnih ekvivalenata u trenucima odabiranja imaju istu vrijednost kao i impulsni odziv kontinualnog sistema, što je i očekivano sa teorijskog stanovišta.

Sinusoidalni odzivi sistema W i W_{d1} su u trenucima odabiranja približno jednaki, jer im frekv. karakt. imaju približno istu vrijednost na 5 rad/s. Kako je Nikvistova frekvencija drugog sistema jednaka $\omega_N = \pi/2$, što je manje od 5 rad/s, kao posljedica aliasing-a ova komponenta će se pojaviti u primarnom pojasu na frekvenciji $5-\pi=1.85$ rad/s i biće pojačana.



Pravila numeričke integracije

Pored metoda istog impulsnog odziva, za diskretizaciju sistema se mogu koristiti pravilima numeričke integracije/diferencijacije:

$$s = \frac{z-1}{T} \text{ diferenciranje unaprijed,}$$

$$s = \frac{z-1}{zT} \text{ diferenciranje unazad,}$$

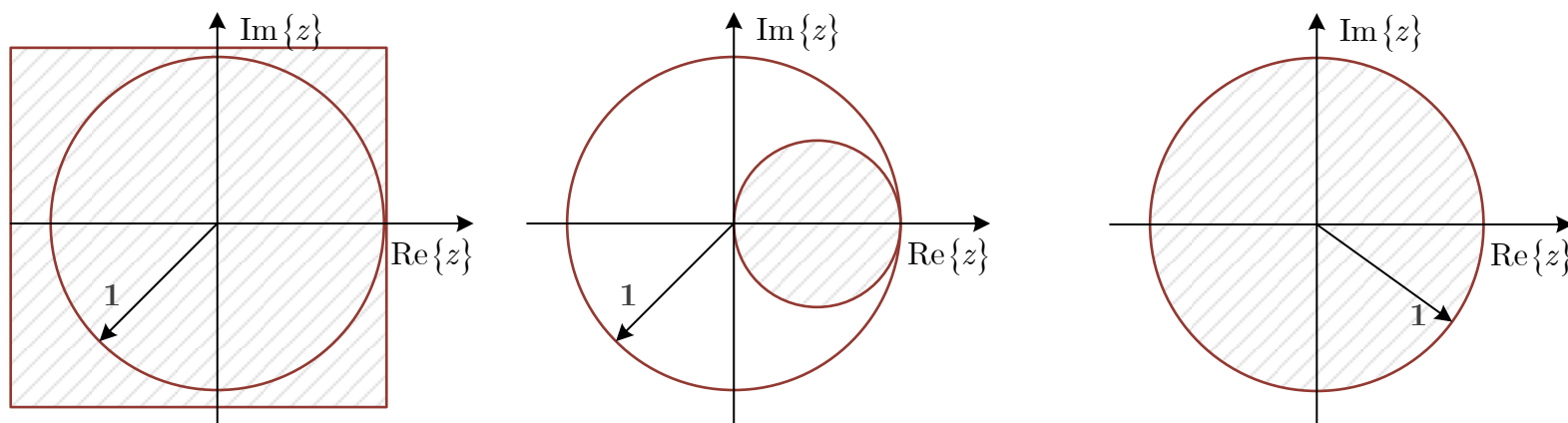
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \text{ bilinearna (Tustinova) transformacija.}$$

Ako se iz prethodnih smjena za promjenljivu s izrazi kompleksna promjenljiva z , dobija se:

$$z = sT + 1, \quad z = \frac{1}{1 - sT}, \quad z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}.$$

Pored frekvencijske karakteristike diskretnih ekvivalenata, interesantno je razmotriti u šta će se preslikati lijeva poluravan s -ravni, korištenjem gornjih preslikavanja.

Pravila numeričke integracije



Na slikama iznad su prikazane oblasti u z -ravni u koje se preiskava lijeva poluravan s -ravni, primjenom prethodno pomenuta tri pravila. Kao što se može primijetiti, primjenom diferenciranja unazad lijeva poluravan s -ravni se ne preslikava unutar jediničnog kruga. To znači da se može desiti da se polovi sistema preslikaju u nestabilne polove u z -ravni, ukoliko je perioda odabiranja velika. Sa druge strane, kod diferenciranja unazad i bilinearne transformacije lijeva poluravan s -ravni se uvijek preslikava unutar jediničnog kruga, što znači da će se stabilni sistemi uvijek preslikati u stabilne.

Tustinova transformacija

Polazeći od izraza za Tustinovu transformaciju:

$$z = \frac{1 + sT / 2}{1 - sT / 2},$$

a zatim uvodeći smjene:

$$z = e^{jwT} \text{ i } s = j\omega,$$

može se uspostaviti sljedeća veza između frekvencija diskretnog (w) i analognog sistema (ω):

$$w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}.$$

$$\tan x = x, \text{ za } x \approx 0$$

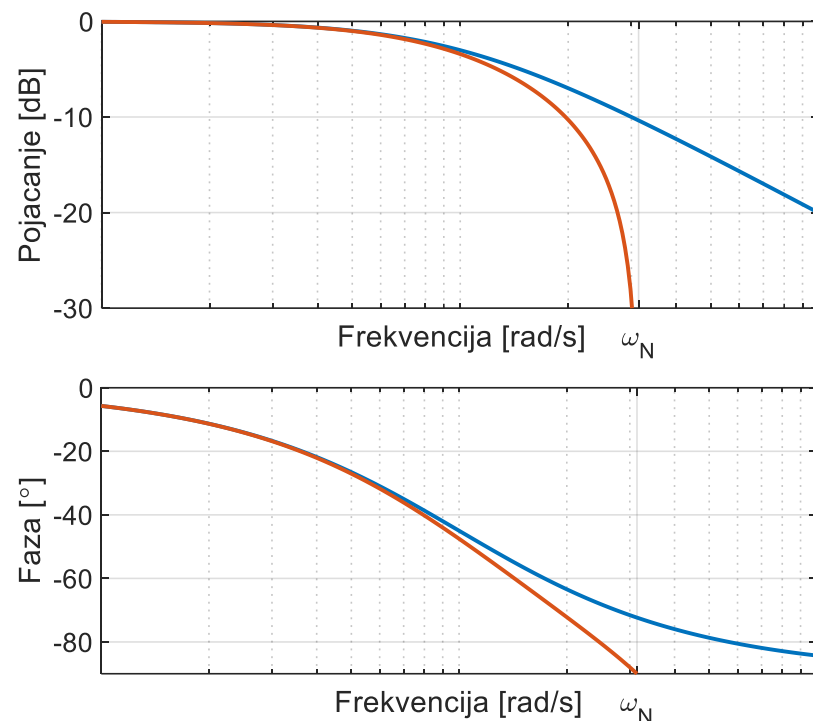
Da bi se razlikovale, ove frekvencije su različito označene. Veza između frekvencija w i ω je linearna sve dok $\omega T/2$ ima malu vrijednost (na nižim frekvencijama). Na višim frekvencijama dolazi do izražaja nelinearnost $\tan$ funkcije, pa će se frekvencijske karakteristike digitalnog i analognog sistema razlikovati (takozvano uvijanje frekvencije).

Tustinova transformacija

Na slici desno je prikazana frekven. karakteristika analognog sistema, kao i frekven. karakteristika diskretnog ekvivalenta. Može se uočiti da se na nižim frekvencijama ove dvije karakteristike podudaraju, dok na višim frek. postoji razlika između njih. Smanjivanjem periode odabiranja pomenuta razlika će se smanjiti, a ujedno će se povećati i propusni opseg diskretnog sistema (povećaće se ω_N).

Nekad je od bitno obezbijediti da se karakteristike sistema podudaraju u okolini neke frekvencije od interesa ω_T . Tada se koristi modifikovana Tustinova aproksimacija:

$$s = \frac{\omega_T}{\tan \frac{\omega_T T}{2}} \frac{z-1}{z+1} \longrightarrow \text{Iz uslova } G(j\omega_T) = G(e^{j\omega_T T})$$



Primjer – Tustinova transformacija

Funkcija prenosa kontinualnog sistema je:

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Primjenom standardne i modifikovane Tustinove transformacije ($\omega_T=0.7\omega_N$) odrediti diskretne ekvivalente sistema, a zatim skicirati i uporediti njihove frekvencijske karakteristike. Perioda odabiranja je $T=1s$. Uporediti step odzive sistema, kao i odzive sistema na signale $x(t)=\sin(0.1\omega_N t)$ i $x(t)=\sin(\omega_T t)$, gdje je ω_N Nikvistova frekvencija.

Primjenom Tustinove transformacije, za $T=1s$, dobija se sljedeći diskretni ekvivalent:

$$W_{d_1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.0008058z^2 + 0.001612z + 0.0008058}{z^2 - 1.932z + 0.9355},$$

dok je modifikovani Tustinov ekvivalent, uz $\omega_T=0.9\omega_N$, jednak:

$$W_{d_2} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Big|_{s=\frac{\omega_T}{\tan \frac{T\omega_T}{2}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.1397z^3 + 0.4191z^2 + 0.4191z + 0.1397}{z^3 - 0.2082z^2 + 0.3448z - 0.01911}.$$

Primjer – Tustinova transformacija

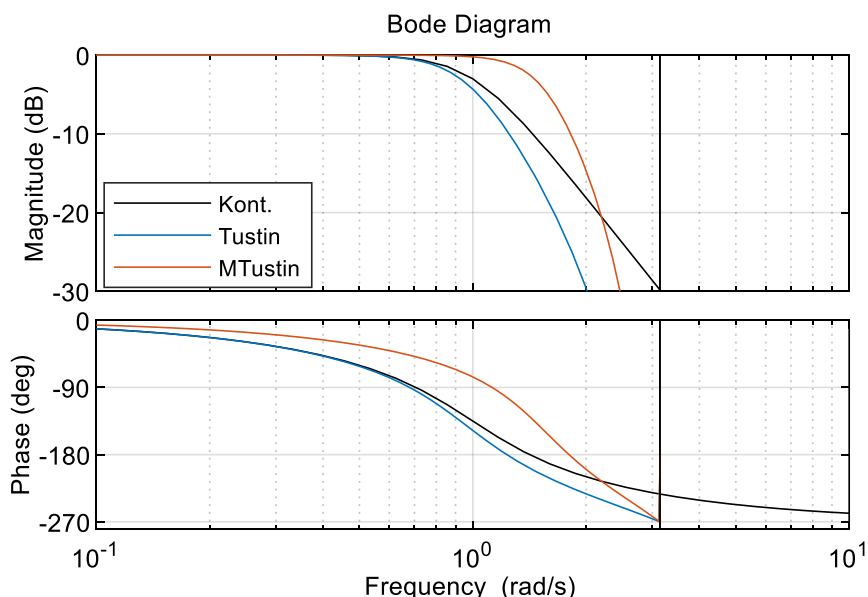
Na slici ispod su prikazane frekvencijske karakteristike kontinualnog sistema i diskretnih ekvivalenata. Frekvencijska karakteristika diskretnih ekvivalenata je prikazana samo na opsegu $[0, \omega_N]$, zbog njene periodičnosti. Može se primjetiti da se amplitudska i fazna karakteristika Tustinovog ekvivalenta poklapa sa kontinualnim sistemom za širok opseg frekvencija. Sa druge strane, amplitudska i fazna karakteristika modificiranog Tustinovog ekvivalenta se podudara sa frekv. karakteristikom kontinualnog sistema na frekvenciji ω_T , dok je na nižim učestanostima uočljiva razlika između faza ova dva sistema.

Statičko pojačanje sistema $W(s)$ je jednako 1, dok su statička pojačanja diskretnih ekvivalenata:

$$K_{d_1} = \lim_{z \rightarrow 1} W_{d_1}(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_{d_1}(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = 1.$$

$$K_{d_2} = \lim_{z \rightarrow 1} W_{d_2}(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} W_{d_2}(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = 1.$$

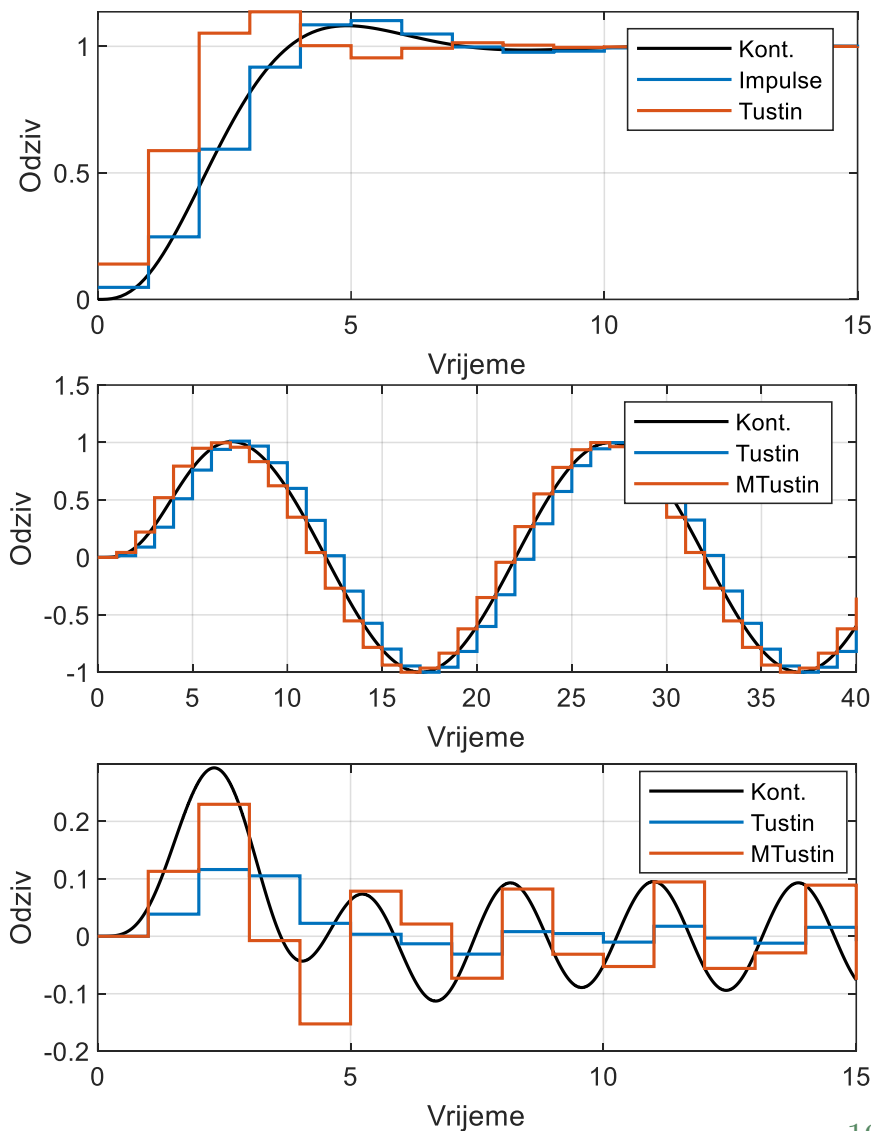
Na osnovu ovoga možemo očekivati da će step odzivi sistema imati istu vrijednost u stacionarnom stanju.



Primjer – Tustinova transformacija

Na slikama desno su prikazani step odzivi sistema, kao i odzivi sistema na signale $x(t)=\sin(0.1\omega_N t)$ i $x(t)=\sin(0.7\omega_N t)$, odnosno na signale $x(nT)=\sin(0.1\omega_N nT)$ i $x(t)=\sin(0.7\omega_N nT)$ u diskretnom slučaju. Može se uočiti da step odzivi imaju istu vrijednost u stacionarnom stanju, što je i očekivano, s obzirom da sistemi imaju isto statičko pojačanje. Sa druge strane tokom trajanja prelazanog procesa step odziv sistema W_{d1} je sličniji odzivu sistema $W(s)$, nego step odziv sistema W_{d2} . Ovo je takođe očekivano, s obzirom da fazna karakteristika sistema W_{d2} sporije opada na nižim učestanostima (pozitivnija je), zbog čega njegov step odziv i prednjači.

Sa slika se takođe može uočiti da se u trenucima odabiranja odzivi sistema W i W_{d2} na signal $x(t)=\sin(\omega_T t)$ podudaraju u trenucima odabiranja.



Primjer – Tustinova transformacija

```
s=tf('s')
W=1/(s^3+2*s^2+2*s+1);T=1;
wn=pi/T; wT=0.7*wn;
opt=bodeoptions;
Wd1=c2d(W,T,'tustin');
Wd2=c2d(W,T,'prewarp',wT);
bode(W,opt,'k')
hold on
bode(Wd1,opt)
bode(Wd2,opt)
legend('Kont.','Tustin','MTustin')
w0=0.7*wn;
t=0:0.0001:15; %
t1=0:T:15; % odabiramo vrijeme sa periodom T
x=sin(w0*t);
x1=sin(w0*t1);
y=lsim(W,x,t);
yd1=lsim(Wd1,x1,t1);
yd2=lsim(Wd2,x1,t1);
plot(t,y,'k','linewidth',1)
hold on
stairs(t1,yd1,'linewidth',1)
stairs(t1,yd2,'linewidth',1)
legend('Kont.','Tustin','MTustin')
```

Metod usklađenih polova i nula

Kod metoda usklađenih polova i nula (eng. matched pole-zero, MPZ) nule i polovi funkcije prenosa kontinualnog sistema se preslikavaju na sljedeći način:

$$z = e^{s_i T},$$

gdje su sa s_i označeni svi polovi i nule funkcije prenosa. Ukoliko sistem ima n polova, a m nula, tada diskretnu funkciju prenosa treba dodatno pomnožiti sa $(z+1)^{n-m}$ ili sa $(z+1)^{n-m-1}$. Na kraju, statičko pojačanje diskretnog sistema K_d treba odabrati tako da bude jednako pojačanju kontinualnog sistema:

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s).$$

Primjer

$$G(s) = K \frac{s+a}{s(s+b)(s+c)} \rightarrow G(z) = K_d \frac{\overbrace{(z+1)^2}^{\text{ili samo } z+1} (z - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-bT})(z - e^{-cT})}$$

Primjer – MPZ metod

Koristeći MPZ metod diskretizovati sistem čija je funkcija prenosa:

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Perioda odabiranja sistema je $T=1s$. Uporediti step odzive i frekvencijske karakteristike kontinualnog i diskretnog sistema.

Sistem ima dva kompleksna i jedan realni pol: -1 , $-0.5 \pm j0.866$. Primjenom preslikavanja $z=e^{sT}$ ovi polovi se preslikavaju u 0.3679 , $0.3929 \pm j0.462$, odnosno karakteristični polinom će biti jednak:

$$f(z) = z^3 - 1.1538z^2 + 0.6570z - 0.1353.$$

Sistem ima 3 pola i 0 nula, pa diskretnu funkciju prenosa treba dodatno pomnožiti sa polinimom $(z+1)^3$ ili $(z+1)^2$. Funkcija prenosa sistema će biti jednaka:

$$W(z) = K_d \frac{(z+1)^2}{z^3 - 1.1538z^2 + 0.6570z - 0.1353}.$$

```
>> s=tf('s')
>> W=1/(s^3+2*s^2+2*s+1);
>> T=1;
>> polovi=exp(pole(W)*T)
>> f=poly(polovi)
    1 -1.1538 0.657 -0.1353
>> polyval(f,1)
    0.3679
>> Wd=c2d(W,T,'matched');
```

Primjer – MPZ metod

Iz uslova da je

$$\lim_{z \rightarrow 1} W(z) = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$$

se dobija:

$$K_d = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} W(s)}{(z+1)^2} = \frac{0.3679}{4} = 0.092.$$

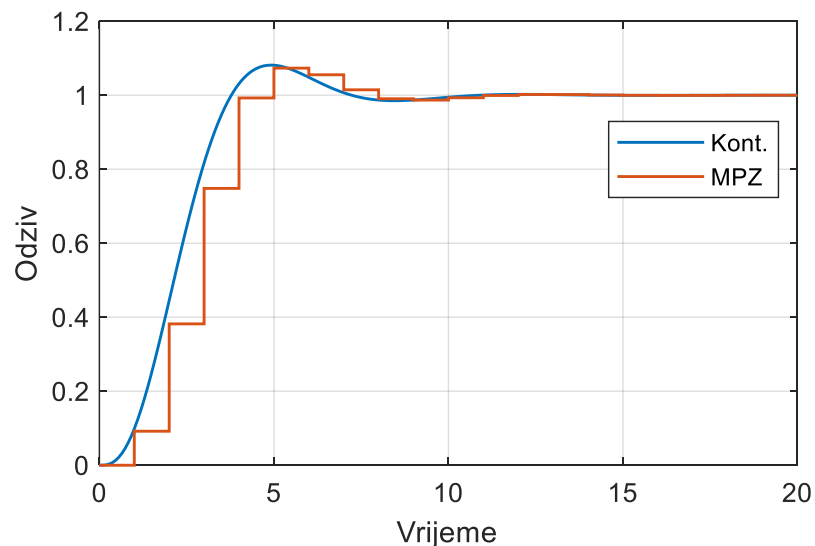
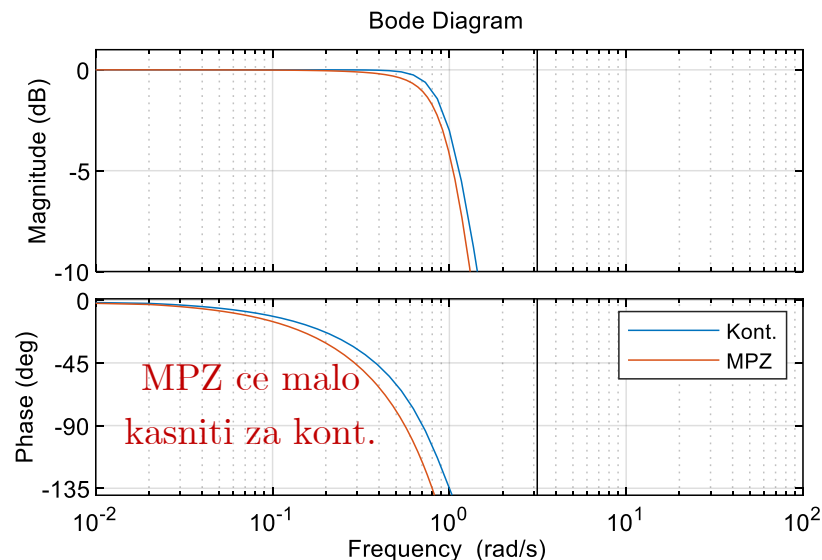
Konačno, funkcija prenosa sistema je:

$$W(z) = 0.092 \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 - 1.1538z^2 + 0.6570z - 0.1353}.$$

Na slikama desno su prikazani step odzivi i frekvencijske karakteristike sistema.

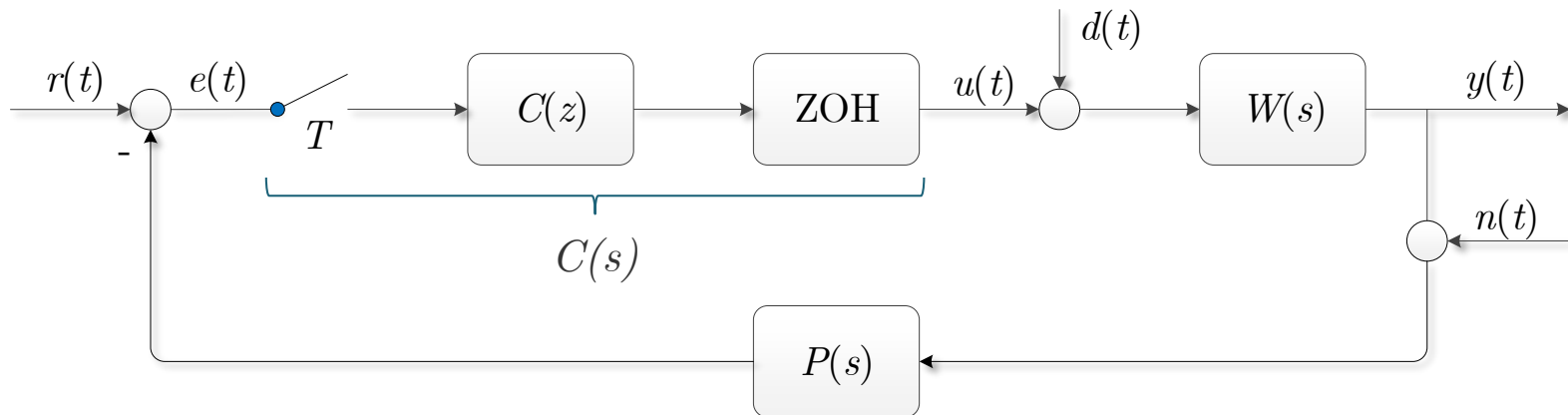
```
c2d(W,T,'matched');
```

u Matlab-u



Izbor periode odabiranja

Prilikom izbora periode odabiranja treba imati u vidu da je spektar signala koji uzorkujemo neograničen, te i da postoji povratna sprega u sistemu upravljanja. Do preporuka o vrijednosti periode odabiranja može se doći na temelju poznavanja karakteristika sistema u otvorenoj sprezi ili pak na osnovu poznavanja karakteristika spregnutog sistema.



$$L(s) = C(s)W(s)P(s)$$

Funkcija prenosa u otvorenoj petlji

$$G(s) = \frac{C(s)W(s)}{1 + L(s)}$$

Funkcija spregnutog prenosa

Izbor periode odabiranja

Preporuke za izbor periode odabiranja na osnovu $L(s)$:

- ZOH kolo obara faznu karakteristiku i smanjuje pretek faze. Ukoliko želimo da se pretek faze spregnutog sistema pogorša najviše za 5° do 15° , tada kružnu frekvenciju odabiranja treba odabrati tako da bude unutar sljedećeg opsega:

$$12\omega_\gamma < \Omega < 36\omega_\gamma,$$

gdje je ω_γ presječna učestanost preteka faze.

- Drugi način za određivanje periode odabiranja je na osnovu amplitudske karakteristike sistema u otvorenoj sprezi. Ako sa ω_{gr} označimo frekvenciju na kojoj amplitudska karakteristika iznosi -20dB, tada se perioda odabiranja može usvojiti prema sljedećem pravilu:

$$T < \frac{0.6}{\omega_{gr}}.$$

Izbor periode odabiranja

Preporuke za izbor periode odabiranja na osnovu $G(s)$:

- S obzirom da su propusni opseg (ω_B) i vrijeme uspona (T_u) pokazatelji brzine spregnutog sistema, oni mogu poslužiti za određivanje periode odabiranja. U literaturi se mogu naći sljedeće preporuke za izbor kružne frekvencije odabiranja:

$$5\omega_B < \Omega_s < 100\omega_B,$$

odnosno periode odabiranja:

$$\frac{1}{10}T_u < T < \frac{1}{4}T_u.$$

- Ako je poznato vrijeme smirenja sistema T_s , tada se perioda odabiranja može usvojiti na sljedeći način:

$$\frac{T_s}{100} < T < \frac{T_s}{5}.$$

Izbor periode odabiranja

Treba imati u vidu da se smanjivanjem periode odabiranja uvijek dobija bolji diskretni ekvivalent. Međutim, manja perioda odabiranja iziskuje brži takt procesora, odnosno skuplji hardver.

Pored toga, smanjivanjem periode odabiranja mogu nastati greške numeričke prirode (prilikom implementacije, a i dizajna kontrolera), zbog toga što računari imaju konačnu preciznost. Kada $T \rightarrow 0$, svi polovi se preslikavaju u nešto što teži 1.

Na primjer, razmotrimo sistem koji ima dva pola $s_1=-1$ i $s_2=-10$.

- Ako je perioda odabiranja $T=1\text{ms}$, tada će se ovi polovi preslikati na sljedeći način:

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{-0.001} \approx 0.9990 \text{ i } z_2 = e^{s_2 T} = e^{-0.01} \approx 0.9900$$

Ako polove zakružimo na dvije decimale, tada će važiti $z_1=z_2$.

- Sa druge strane, ako je $T=100 \text{ ms}$, gornji polovi će se preslikati u $z_1 = 0.90$, $z_2 = 0.36$.

Izbor periode odabiranja

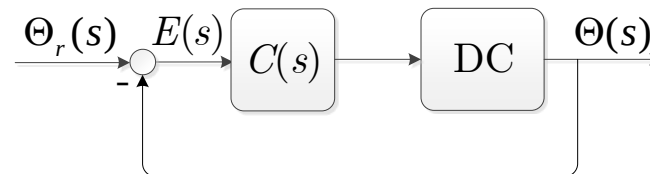
Na kraju, možemo iznijeti još par zaključaka vezanih za izbor periode odabiranja:

- Perioda odabiranja treba da bude dovoljno mala da bi se uhvatila dinamika sistema (Nikivstova frekvencija treba da bude nekoliko puta veća od propusnog opsega sistema).
- Perioda odabiranja treba da bude dovoljno mala da bi sistem mogao brzo da regulje na poremećaje (veće $\omega_N \rightarrow$ veći propusni opseg digitalnog sistema $\rightarrow$ bolje suzbijanje poremećaja).
- Perioda odabiranja treba da bude dovoljno velika kako ne bi prečesto unosili mjerni šum u sistem (manje $\omega_N \rightarrow$ manji propusni opseg digitalnog sistema $\rightarrow$ manja osjetljivost na šum).
- Perioda odabiranja treba da bude dovoljno velika da bi prilikom dizajna i implementacije kontrolera izbjegli greške numeričke prirode.
- Perioda odabiranja treba da bude dovoljno velika da bi izbjegli potrebu za brzim i skupim hardverom.

Primjer – diskretizacija SAU-a

Funkcija prenosa DC motora je:

$$W(s) = \frac{3086}{s(s^2 + 145.5s + 86.14)}.$$



Pozicijom motora se upravlja kontrolerom čija je funkcija prenosa:

$$C(s) = 2.7913 \times \frac{\frac{s}{2.03} + 1}{\frac{s}{49.15} + 1} \times \frac{s + 1}{\frac{s}{0.3443} + 1}$$

Kontroler je dizajniran tako da budu zadovoljeni sljedeći zahtjevi:

$$K_v^* = 100, \gamma_m^* = 60^\circ (\pm 3^\circ),$$
$$\omega_\gamma^* \approx 10 \text{ rad/s } (\pm 0.1 \text{ rad/s}).$$

Dizajnirati digitalni kontroler koristeći bilinearnu transformaciju. Kružnu frekvenciju odabiranja izabrati tako da bude 20 puta veća od propusnog opsega sistema. U Simulinku simulirati step odzive kontinualnog i diskretnog SAU-a.

Uporediti frekvencijske karakteristike kontinualnog i diskretnog SAU-a.

Primjer – diskretizacija SAU-a

Propusni opseg sistema se računa na osnovu funkcije prenosa spregnutog sistema:

$$G(s) = \frac{C(s)W(s)}{1 + C(s)W(s)},$$

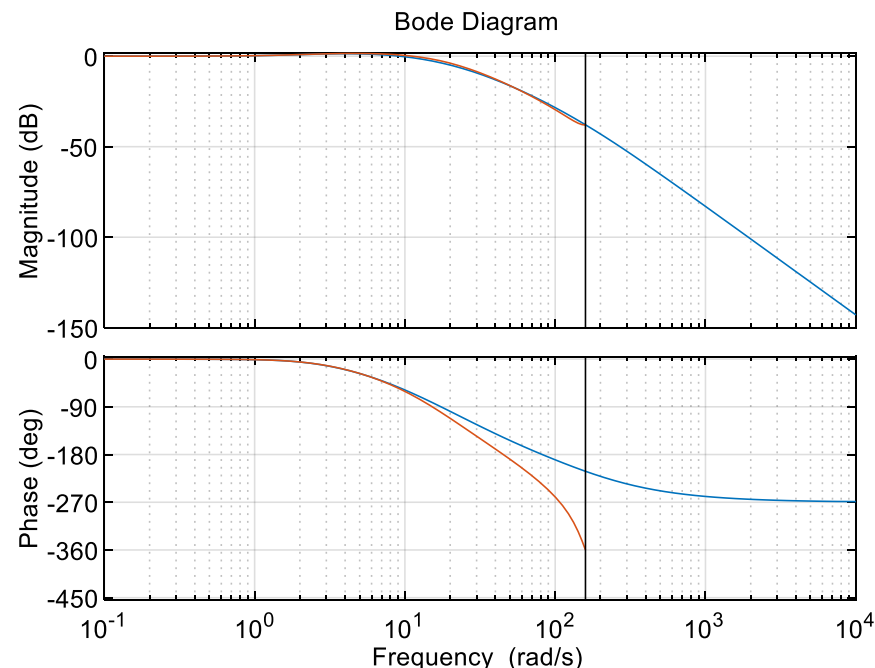
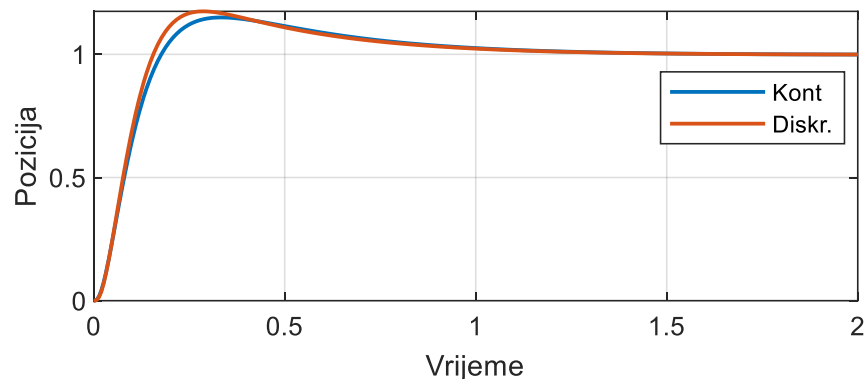
i iznosi:

$$\omega_B = 15.9034 \text{ rad/s.}$$

Perioda odabiranja je jednaka:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{10\omega_B}.$$

Na slikama desno su prikazani step odziv kontinualnog i diskretnog sistema, kao i njihove frekvencijske karakteristike. Može se uočiti da diskretni sistem ima nešto veći preskok, što je posljedica odabiranja, odnosno faznog kašnjenja koje unosi ZOH kolo. Takođe se može uočiti da diskretni sistem ima mali veći rezonantni vrh, što je zapravo indikator većeg preskoka.



Primjer – diskretizacija SAU-a

```
s=tf('s')
W=3086/s/(s^2+145.5*s+86.14);
C=2.7913*(s/2.03+1)*(s+1)/(s/49.15+1)/(s/0.3443+1);
G=feedback(W*C,1);
wb=bandwidth(G); ws=20*wb;T=2*pi/ws;
Cd=c2d(C,T,'tustin')
sim('primjer_diskretizacija_SAU_S.slx')
plot(yc.time,yc.data,'linewidth',1.2)
hold on, plot(yd.time,yd.data,'linewidth',1.2)
set(gcf,'units','centimeters','position',[10 6 11 4.5])
legend('Kont','Diskr. '),xlabel('Vrijeme')
ylabel('Pozicija'), grid
Wd=c2d(W,T,'zoh'); % diskretizacija procesa
Gd=feedback(Cd*Wd,1)
%step(Gd) % dobilo bi odziv diskretnog sistema koji u trenucima odabiranja
%poklapa sa hibridnim iz Simulinka
figure
opt=bodeoptions;
bode(G,opt)
hold on
bode(Gd,opt)
hold
set(gcf,'units','centimeters','position',[10 6 11 8])
grid
```

Primjer – diskretizacija SAU-a

Na slici je prikazana realizacija diskretnog sistema pomoću *LTI Block*-a kojim se importuje diskretna funkcija prenosa iz radnog prostora, kao i realizacija pomoću m-file-a. Perzistentne promjenljive se koriste kao memorija, tj. za čuvanje podataka iz prethodnih iteracija.

```
function u = control(y)
% y_n - odbirak mjerenja
% u_n - vektor u kome su
sacuvane prethodne vrijednosti
upravljanja
% e_n - vektor odbiraka greske
B=[16.0815  -31.2162
15.1471]'; % - brojilac C(z)
A=[-1.3396   0.3440]'; % -
imenilac od C(z) bez 1
persistent e_n u_n
if isempty(e_n) % inicijaliz.
    e_n=[0 0 0]';
    u_n=[0 0]';
end
e=1-y; % odbirak greske
e_n=[e;e_n(1:end-1)];
u=B'*e_n-A'*u_n;
u_n=[u;u_n(1:end-1)];
```

